Devoir surveillé 5 - Variables discrètes

Durée : 3h

Calculatrices interdites dans ce sujet.

La présentation, la lisibilité, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les consignes suivantes sont à respecter sous risque d'absence de correction ou de notation, dans ce sujet ainsi que dans tous les suivants :
- Les résultats doivent être encadrés,
- Les pages doivent être numérotées,
- Chaque nouvel exercice ou nouveau problème commencera sur une nouvelle page. (Les exercices peuvent être traités dans l'ordre souhaité, mais les question d'un même exercice doivent être traitées dans l'ordre.)
- Tout résultat ou toute affirmation doit être dûment justifié(e).

Les téléphones portables doivent être rangés dans les sacs.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Chaque étudiant portera en tête de son devoir le tableau suivant :

Réd.	Rais.	Mod.	Calc.	Rech.	Représ.	Expl.	Cours

Exercice 1 :

Soit $f(x) = e^{-2x^2+4x-3}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, écrire $-2x^2+4x-3$ sous la forme

$$-\frac{1}{2}(\alpha x+\beta)^2+\gamma$$

où α, β, γ sont des constantes réelles.

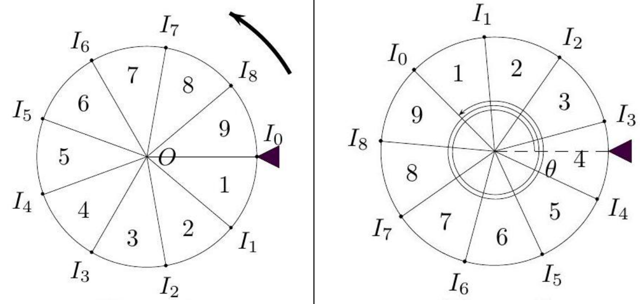
2. À l'aide d'un changement de variables $u = \alpha x + \beta$, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f$ est convergente et déterminer sa valeur.

Problème : Jeu de roulette

Les parties III, IV sont indépendantes mais utilisent des résultats et les notations des parties I et II.

On considère une roulette circulaire, divisée en $s \geqslant 2$ secteurs angulaires réguliers, et pouvant tourner autour d'un axe fixé en son centre O. Chaque secteur porte un numéro de 1 à s, ceux-ci étant ordonnés suivant le sens trigonométrique inverse. $\mathcal{C}$ désignant le cercle délimitant le bord de la roulette, on note I_k le point de $\mathcal{C}$ situé à l'extrémité du rayon séparant le secteur k du secteur $k+1$ pour $1 \leqslant k \leqslant s-1$, et I_0 le point correspondant entre les secteurs s et 1 . Les figures **1** et **2** illustrent ces définitions pour le cas $s = 9$.

Figure 1 **Figure 2**



Position initiale en I_0 — Position finale (départ en I_0)

Un repère fixe triangulaire permet de désigner un unique secteur de la roulette. À l'instant initial, le repère indique un point I de la roulette de sorte que $\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OI_0}\right) = \theta_0$ ($\theta_0 = 0$ et $I = I_0$ dans la **figure 1**. La roulette est lancée dans le sens trigonométrique. On note N la variable aléatoire égale au nombre de tours complets effectués par la roulette avant de s'arrêter et θ la variable aléatoire égale à l'angle total en radians dont a tourné le point I_0 autour de l'axe au cours du mouvement, en tenant compte du nombre de tours complets. Dans l'exemple de la **figure 2**, on a $\theta = 4\pi + 3\pi/4$: cela signifie que la roue a fait $N = 2$ tours complets plus trois huitièmes de tour avant de s'arrêter.
On supposera dans toute la suite que θ admet la fonction de répartition F définie par :

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-\frac{t}{\alpha}} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

où $\alpha > 0$ est un réel fixé.

Partie I. Lois de θ et N

1. On s'intéresse tout d'abord aux spécificités de θ.

a) Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $P(\theta = x) = 0$. *(On pensera à se servir de la fonction de répartition.)*

b) En déduire qu'après un lancer de roue, la probabilité que repère indique un point I correspondant à un des rayons de la roue séparant deux secteurs est nulle.

2. On s'intéresse maintenant à la loi de N.

a) Pour $n \in \mathbb{N}$, à quelles valeurs de θ correspond l'événement $\{N = n\}$?

b) En déduire que N suit une loi géométrique sur $\mathbb{N}$ de paramètre $p = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{\alpha}}$. On pose $q = 1 - p$.

c) Déterminer l'espérance et la variance de N.

Partie II — Loi du numéro gagnant

Une fois le mouvement de la roue terminé, le repère désigne un secteur dont le numéro k est le numéro gagnant.

On note X la variable aléatoire égale au numéro gagnant. Dans le cas de l'exemple introductif $\theta = 4\pi + 3\pi/4$ (**figure 2**) le numéro gagnant est alors $X = 4$.

3. Soient k un entier entre 1 et s et $n \in \mathbb{N}$. On suppose ici qu'à l'instant initial, le repère désigne le point I_0, comme sur la **figure 1**.

a) Expliciter l'événement $[X = k \cap N = n]$ par rapport à l'expérience, ainsi que par rapport à l'angle θ.

b) Montrer que la probabilité de $[X = k \cap N = n]$ est

$$P[X = k \cap N = n] = q^n q^{\frac{k}{s}} \left(q^{-\frac{1}{s}} - 1 \right).$$

4. a) Montrer que pour k fixé, la série de terme général u_n tel que $u_n = P[X = k \cap N = n]$ est convergente, de somme totale $P[X = k]$.

b) En déduire que la probabilité de l'événement $\{X = k\}$ est

$$P[X = k] = q_0 r^{k-1} \quad \text{où} \quad q_0 = \frac{1 - q^{\frac{1}{s}}}{1 - q} \ ; \ r = q^{\frac{1}{s}}.$$

Les zones sur lesquelles on tombe après avoir tourné la roue sont-elles équiprobables ?

Partie III. — Zones colorées

Dans cette partie, on démarre toujours de la position I_0. on suppose que $s \geqslant 3$ est impair. On colore les zones de manière à ce que le numéro s soit coloré en vert, les numéros pairs soient colorés en rouge et que le reste (les zones impaires sauf s) soit noir.

5. a) On pose X_P l'événement "tomber sur la couleur rouge". Montrer que

$$P(X_P) = \frac{q^{\frac{1}{s}} - q}{(1-q)(1 + q^{\frac{1}{s}})}$$

b) On pose maintenant X_I l'événement "tomber sur une zone noire". Déterminer $P(X_I)$ et l'exprimer en fonction de q et s.

6. Voici ci-dessous deux graphiques de la fonction $\varphi : \alpha > 0 \mapsto P(X_I) - P(X_P)$ pour deux s différents.

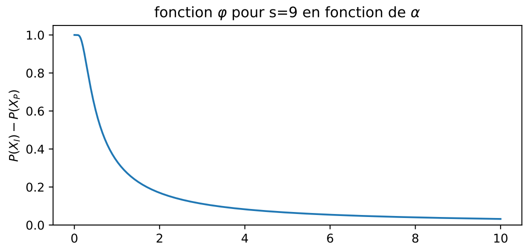


Figure 3

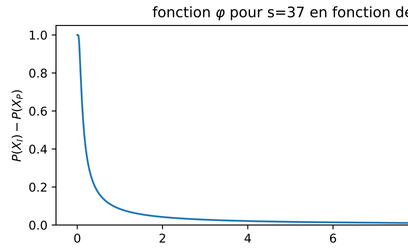


Figure 4

a) Sur laquelle des deux couleurs rouges et noires semble-t-on tomber le plus fréquemment ?

b) Semble-t-il y avoir des valeurs de α ? s ? Pour lesquelles les deux couleurs soient équiprobables ?

c) Démontrer maintenant la conjecture de la question 6a) précédente. *(On pourra s'intéresser par exemple à la probabilité des zones successives.)*

Partie IV. — Parties enchaînées

On supposera dans toute cette partie que $s = 3$ (voir **figure 5** ci-dessous). La roulette est maintenant lancée plusieurs fois de suite, la position initiale avant le premier lancer étant en I_0. À l'issue de chaque mouvement :

— si le numéro gagnant est 1 , la roulette est relancée depuis la position I_1

— si le numéro gagnant est 2 , la roulette est relancée depuis la position I_2

— si le numéro gagnant est 3, la roulette est relancée depuis la position I_0

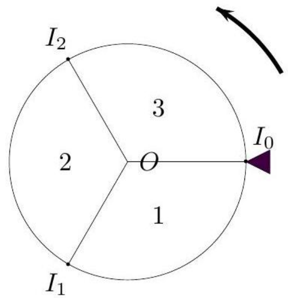


Figure 5

Pour le lancer numéroté $i \geqslant 1$, on notera X_i le numéro gagnant, et Y_i le vecteur

$$Y_i = \begin{pmatrix} P\left[X_i = 1\right] \\ P\left[X_i = 2\right] \\ P\left[X_i = 3\right] \end{pmatrix}$$

7. Soit $i \geqslant 1$. On cherche ici à obtenir une relation de récurrence entre Y_{i+1} et Y_i.

a) Pour $1 \leqslant k \leqslant 3$, justifier que

$$P\left[X_{i+1}=k \mid X_i=3\right]=P(X=k)$$

et exprimer alors ces probabilités en fonction de q_0 et r.

b) Pour $1 \leqslant k \leqslant 3$, Calculer de même $P\left[X_{i+1}=k \mid X_i=1\right]$ et $P\left[X_{i+1}=k \mid X_i=2\right]$ en fonction de q_0 et r.

c) Justifier que la matrice $A=q_0\begin{pmatrix} r^2 & r & 1 \\ 1 & r^2 & r \\ r & 1 & r^2 \end{pmatrix}$ contient à l'intersection de la ligne k et de la colonne k' la probabilité conditionnelle $P\left[X_{i+1}=k \mid X_i=k'\right]$.

d) En déduire que $Y_{i+1}=AY_i$, puis que $Y_n=A^nU$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ où

$$U=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

8. On étudie maintenant la matrice A^n. On rappelle ici que, par convention, pour toute matrice M carrée, on pose $M^0=Id$.
Soient

$$j=\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}},\ \delta_2=q_0\left(r^2+j+rj^2\right) \text{ et } \delta_3=q_0\left(r^2+j^2+rj\right).$$

a) Vérifier les relations suivantes :

$$j^3=1,\ 1+j+j^2=0,\ 1+\bar{j}+\bar{j}^2=0,\ \bar{j}=j^2,\ |j|^2=1$$

b) Vérifier maintenant la relation

$$q_0(1+r+r^2)=1$$

On pose maintenant une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ par

$$\mathcal{B}=(u,v,w) \text{ telle que } u=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ v=\begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix},\ w=\begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}$$

On note P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base $\mathcal{B}$ ainsi que $\overline{P}$ la matrice conjuguée de P, c'est-à-dire la matrice dont les coefficients sont les conjugués de P.
On admettra dans la suite que

$$A=P\Delta P^{-1}$$

où

$$\Delta=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_3 \end{pmatrix}$$

c) Calculer $\overline{P}\times P$ et en déduire l'expression de P^{-1}.

d) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$A^n=P\Delta^nP^{-1}$$

9. **a)** Exprimer les probabilités $P(X_n=k)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $k=1,2,3$ en fonction de $n, j, j^2, \delta_2, \delta_3$.

b) Vérifier que $\delta_2=\overline{\delta_3}$. Montrer que

$$\left(r^2+j+j^2r\right)\left(r^2+j^2+rj\right)=(1-r)\left(1-r^3\right).$$

En déduire que $|\delta_2|<1$, $|\delta_3|<1$.

c) En déduire $\lim\limits_{i\to+\infty} P\left[X_i=k\right]$ pour tout $k \in \{1,2,3\}$ et interpréter le résultat.

Exercice 1

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}-2x^2+4x-3 &= -\frac{1}{2}\left(4x^2-8x+6\right)\\ &= -\frac{1}{2}\left((2x-2)^2-4+6\right)\\ &= -\frac{1}{2}\left((2x-2)^2+2\right)\end{aligned}$$

i.e.

$$\boxed{-2x^2+4x-3=-\frac{1}{2}(2x-2)^2-1}$$

2. On constate pour commencer que f est continue sur $\mathbb{R}$, avec, d'après la question précédente :

$$f(x)=e^{-\frac{1}{2}(2x-2)^2-1}$$

Les problèmes seraient donc en $\pm\infty$. La fonction f ne semble ni paire ni impaire, on ne peut donc pas simplifier le problème dans l'immédiat.
On pose donc comme proposé le changement de variable $u=2x-2$, qui est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et bijectif, avec

$$x=\frac{u+2}{2},\quad dx=\frac{1}{2}du$$

et le changement de bornes :

x	$-\infty$	$+\infty$
u	$-\infty$	$+\infty$

Par théorème de changement de variables généralisé, l'intégrale proposée est donc de même nature et en cas de convergence de même valeur que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2-1}\frac{1}{2}du=\frac{1}{2}e^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2}du$$

Or, cette intégrale est connue d'après le cours et on sait qu'elle est convergente, de somme totale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2}du=\sqrt{2\pi}$$

D'où la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f$ avec

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f=\frac{\sqrt{2\pi}}{2e}}$$

Problème 1 :

1. a) On sait, d'après le cours, que

$$P(\theta=x)=P(\theta\leqslant x)-P(\theta<x)=F(x)-\lim_{t\to x,t<x}F(t)$$

Or F est continue, ainsi on obtient

$$\lim_{t\to x,t<x}F(t)=F(x)$$

et donc

$$\boxed{P(\theta=x)=0}$$

1.b) On note E l'événement "tomber sur un rayon séparant deux secteurs". On a trivialement

$$E=\cup_{k\in\mathbb{N}}(\theta=k\frac{2\pi}{s}).$$

Ainsi, par σ-additivité :

$$\begin{aligned}P(E) &= \sum_{k=0}^{+\infty}P(\theta=k\frac{2\pi}{s})\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}0\quad\text{(d'après la qst préc.)}\\ &= 0\end{aligned}$$

Ainsi, on a bien

$$\boxed{\text{La probabilité de tomber sur un rayon est nulle.}}$$

2. a) N étant le nombre de tours entièrement effectués, trivialement, on a

$$\boxed{(N=n)=(2\pi n\leqslant\theta<2\pi(n+1))}$$

2.b) N est à valeurs dans $\mathbb{N}$, i.e. $Supp(N) = \mathbb{N}$.

D'après la question précédente, on a que

$$P(N = n) = P(2\pi n \leqslant \theta < 2\pi(n+1))$$

Or, d'après la question 1), on a $P(\theta = x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$P(N = n) = P(2\pi n < \theta \leqslant 2\pi(n+1)) = F\left(2\pi(n+1)\right) - F\left(2\pi n\right)$$

Par formule de F, on en déduit que

$$P(N=n) = 1 - e^{-\frac{2\pi(n+1)}{\alpha}} - \left(1 - e^{-\frac{2\pi n}{\alpha}}\right) = e^{-\frac{2\pi n}{\alpha}} - e^{-\frac{2\pi(n+1)}{\alpha}} = e^{-\frac{2\pi n}{\alpha}}\left(1 - e^{-\frac{2\pi}{\alpha}}\right)$$

On reconnait une forme

$$\boxed{P(N=n) = \left(e^{-\frac{2\pi}{\alpha}}\right)^n \left(1 - e^{-\frac{2\pi}{\alpha}}\right) = p(1-p)^n}$$

ce qui correspond bien à une

$$\boxed{\text{loi géométrique à support dans } \mathbb{N} \text{ de paramètre } p}$$

(et qui correspond au nombre d'échecs dans une série d'événements indépendants.)

2.c) D'après le cours, on sait que

$$\boxed{\mathbb{E}[N] = \frac{1}{p} - 1 = \frac{e^{-\frac{2\pi}{\alpha}}}{1 - e^{-\frac{2\pi}{\alpha}}} = \frac{1}{e^{\frac{2\pi}{\alpha}} - 1}}$$

et

$$\boxed{V(N) = \frac{q}{p^2} = \frac{e^{-\frac{2\pi}{\alpha}}}{(1 - e^{-\frac{2\pi}{\alpha}})^2}}$$

3. **3.a)** Cet événement correspond à "faire exactement n tours complets et s'arrêter sur la zone k."
La roulette étant divisée en s zones, cela correspond alors à

$$\boxed{(X = k \cap N = n) = \left(2\pi n + \frac{2\,(k-1)\,\pi}{s} \leqslant \theta < 2\pi n + \frac{2k\pi}{s}\right)}$$

3.b) Au vu de la question précédente, et de la même manière que pour la loi de N, on a :

$$P\left(X = k \cap N = n\right) = F\left(2\pi n + \frac{2k\pi}{s}\right) - F\left(2\pi n + \frac{2\,(k-1)\,\pi}{s}\right)$$

et donc, par la formule de F et mise en facteur (comme dans la loi de N :)

$$P\left(X = k \cap N = n\right) = e^{-\frac{\left(2\pi n + \frac{2\,(k-1)\,\pi}{s}\right)}{\alpha}} \left(1 - e^{-\frac{2\pi}{\alpha s}}\right)$$

On reconnait donc directement

$$P\left(X = k \cap N = n\right) = q^{n+(k-1)/s}(1 - q^{1/s})$$

et donc, comme

$$q^{n+(k-1)/s} = q^n q^{k/s} q^{-\frac{1}{s}}$$

par développement sur le membre de droite :

$$\boxed{P\left(X = k \cap N = n\right) = q^n q^{k/s}\left(q^{-1/s} - 1\right)}$$

4. **4.a)** Les événements $(X = k \cap N = n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont 2 à 2 incompatibles et par la $\sigma-$additivité, $\sum P\left(X = k \cap N = n\right)$ est convergente.
De plus, toujours par σ- additivité,

$$\sum_{n=0}^{\infty} P\left(X = k \cap N = n\right) = P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (X = k \cap N = n)\right) = P\left((X = k) \cap \underbrace{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (N = n)}_{\Omega}\right)$$

i.e.

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} u_n = P(X = k)}$$

4.b) D'après la question précédente, on sait que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n = P(X = k)$. Sachant que :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} q^n q^{k/s}\left(q^{-1/s} - 1\right) = q^{k/s}\left(q^{-1/s} - 1\right)\sum_{n\in\mathbb{N}} q^n$$

et que, par formule de cours, on sait que

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

On en déduit que

$$P(X=k) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n = q^{k/s}\underbrace{\left(q^{-1/s} - 1\right)}_{q^{-1/s}\left(1 - q^{1/s}\right)}\frac{1}{1-q} = \underbrace{q^{(k-1)/s}}_{r^{k-1}}\underbrace{\frac{1 - q^{1/s}}{1-q}}_{q_0}$$

i.e.

$$\boxed{P(X=k)=q_0 r^{k-1}}$$

La formule de probabilité de tomber sur la zone k est du type "suite géométrique". Ainsi, $P(X=k)$ n'est pas constante, ce qui nous donne que $\boxed{X \text{ n'est pas de loi uniforme.}}$

5. 5.**a)** Tomber sur la couleur rouge revient à tomber sur un numéro pair, c'est-à-dire que c'est l'ensemble des $(X=2k)$ pour $2 \leqslant 2k \leqslant s$.

s étant impair, on a

$$2 \leqslant 2k \leqslant s \;\Leftrightarrow\; 2 \leqslant 2k \leqslant s-1 \;\Leftrightarrow\; 1 \leqslant k \leqslant \underbrace{\frac{s-1}{2}}_{\text{entier}}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
P(X_P) &= \sum_{k=1}^{\frac{s-1}{2}} P(X=2k) = \sum_{k=1}^{\frac{s-1}{2}} q_0 r^{2k-1} \\
&= q_0 \sum_{k=1}^{\frac{s-1}{2}} r^{2(k-1)+1} = q_0 r \sum_{i=1}^{\frac{s-1}{2}-1} r^{2i} \text{ (avec } i=k-1) \\
&= q_0 r \sum_{i=1}^{\frac{s-1}{2}-1} (r^2)^i = q_0 r \frac{1-(r^2)^{\frac{s-1}{2}}}{1-r^2} \\
&= q_0 r \frac{1-r^{s-1}}{(1-r)(1+r)} = q_0 q^{\frac{1}{s}} \frac{1-q^{1-\frac{1}{s}}}{(1-q^{\frac{1}{s}})(1+q^{\frac{1}{s}})} \text{ car } r=q^{\frac{1}{s}} \\
&= \frac{1-q^{\frac{1}{s}}}{1-q} \frac{q^{\frac{1}{s}}-q}{(1-q^{\frac{1}{s}})(1+q^{\frac{1}{s}})} \text{ car } q_0 = \frac{1-q^{\frac{1}{s}}}{1-q}
\end{aligned}$$

i.e., après simplification des termes :

$$\boxed{P(X_P) = \frac{q^{\frac{1}{s}}-q}{(1-q)(1+q^{\frac{1}{s}})}}$$

5.**b)** On sait que la famille $(Z_R, X=s, X_I)$ forme un système complet d'événements. Alors

$$P(X_I) = 1 - P(X=s) - P(Z_R)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
P(X_I) &= 1 - q_0 r^{s-1} - \frac{q^{\frac{1}{s}}-q}{(1-q)(1+q^{\frac{1}{s}})} \\
&= 1 - \frac{1-q^{\frac{1}{s}}}{1-q} q \cdot q^{-\frac{1}{s}} - \frac{q^{\frac{1}{s}}-q}{(1-q)(1+q^{\frac{1}{s}})} \\
&= \frac{(1-q)(1+q^{\frac{1}{s}})}{(1-q)(1+q^{\frac{1}{s}})} - \frac{(1-q^{\frac{1}{s}})(1+q^{\frac{1}{s}})}{(1-q)(1+q^{\frac{1}{s}})} q \cdot q^{-\frac{1}{s}} - \frac{q^{\frac{1}{s}}-q}{(1-q)(1+q^{\frac{1}{s}})} \\
&= \frac{1+q^{\frac{1}{s}}-q-qq^{\frac{1}{s}} - \left(1-q^{\frac{2}{s}}\right) q \cdot q^{-\frac{1}{s}} - q^{\frac{1}{s}} + q}{(1-q)(1+q^{\frac{1}{s}})} \\
&= \frac{1-qq^{\frac{1}{s}} - q\left(q^{-\frac{1}{s}} - q^{\frac{1}{s}}\right)}{(1-q)(1+q^{\frac{1}{s}})} \\
&= \frac{1-qq^{-\frac{1}{s}}}{(1-q)(1+q^{\frac{1}{s}})}
\end{aligned}$$

i.e. :

$$\boxed{P(X_I) = \frac{1-qq^{-\frac{1}{s}}}{(1-q)(1+q^{\frac{1}{s}})}}$$

6. 6.**a)** Toutes les fonctions φ dessinées semblent rester toujours positives. Il semblerait donc qu'on ait toujours

$$P(X_I) > P(X_P)$$

et donc

$\boxed{\text{On tomberait plus souvent sur le noir que le rouge.}}$

6.**b)** S'il y a équiprobabilité, alors la fonction φ s'annule, or ça ne semble jamais être le cas. La réponse est donc

$\boxed{\text{Non, il semblerait qu'il ne puisse jamais y avoir équiprobabilité.}}$

Néanmoins, il semblerait également que le tout tende vers 0, ce qui laisserait penser que pour α grand, on serait proche de l'équiprobabilité.

6.**c)** On constate, sur chaque zone numérotée $k \in [\![1, s-1]\!]$, que

$$P(X=k+1) = q_0 r^{k+1-1} = r q_0 r^{k-1} = rP(X=k)$$

Or,

$$r = q^{\frac{1}{s}} = e^{-\frac{2\pi}{\alpha s}} < 1$$

Ainsi,

$$P(X=k+1) < P(X=k)$$

Ce qui peut se traduire par :
"La probabilité d'une zone est strictement supérieur à celle de sa suivante."
ou encore :
"les probabilités des zones sont décroissantes."
Donc, on a

$$\begin{aligned} P(X_P) &= \sum_{k=1}^{\frac{s-1}{2}} \underbrace{P(X=2k)}_{<P(X=2k-1)} \\ &< \sum_{k=1}^{\frac{s-1}{2}} P(X=2k-1) = P(X_I) \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien

$$\boxed{P(X_P) < P(X_I)}$$

7. **7.a)** Pour rappel, concernant $s=3$, la loi de X (de la partie I) est :

$$\forall k \in, \quad \{1,2,3\}, P(X=k) = \frac{q^{k/s}\left(q^{-1/3}-1\right)}{1-q} = \frac{q^{k/s}q^{-\frac{1}{s}}\left(1-q^{1/3}\right)}{1-q}$$

i.e.

$$P(X=k) = \frac{q^{\frac{k-1}{s}}\left(1-q^{1/3}\right)}{1-q} = q_0 r^{k-1}$$

Si $X_i = 3$, avant le $(i+1)$ ème lancer, la position initiale est I_0. Le lancer suivant démarre donc de I_0. Tout se passe donc exactement comme dans la partie I. Ainsi,

$$\boxed{P(X_{i+1}=k/X_i=3) = P(X=k) = q_0 r^{k-1}}$$

7.b) • Si $X_i = 2$

avant le $(i+1)$ ème lancer, la position initiale est I_2.
Tout se passe comme dans le cas de la partie I, mais où les numéros des zones actuelles $(3,1,2)$ à partir du point initial, étaient à l'époque $(1,2,3)$. Ainsi, par-rapport à la loi de X, on a :

$$\boxed{\begin{cases} P(X_{i+1}=1/X_i=2) = P(X=2) = q_0 r \\ P(X_{i+1}=2/X_i=2) = P(X=3) = q_0 r^2 \\ P(X_{i+1}=3/X_i=2) = P(X=1) = q_0 \end{cases}}$$

• Si $X_i = 1$

avant le $(i+1)^{\text{ème}}$ lancer, la position initiale est I_1, les numéros actuelles $(2,3,1)$ à partir du point initial, étaient à l'époque $(1,2,3)$. Donc, comme tout à l'heure :

$$\boxed{\begin{cases} P(X_{i+1}=2/X_i=1) = P(X=1) = q_0 \\ P(X_{i+1}=3/X_i=1) = P(X=2) = q_0 r \\ P(X_{i+1}=1/X_i=1) = P(X=3) = q_0 r^2 \end{cases}}$$

7.c) Il suffit d'identifier les coefficients un par un.

7.d) $(X_i = j)_{j=1,2,3}$ forme un système complet d'événements, donc par la formule des probabilités totales :
Pour $k=1,2,3$,

$$P(X_{i+1}=k) = \sum_{j=1}^{3} P(X_{i+1}=k/X_i=j) P(X_i=j) = \sum_{j=1}^{3} a_{k,j} P(X_i=j)$$

D'où

$$\boxed{Y_{i+1} = AY_i}$$

par récurrence immédiate : $\forall n \geq 1$, $Y_n = A^n U$, car la position initiale avant le premier lancer est I_0, donc

$$Y_1 = \begin{pmatrix} P[X_1=1] \\ P[X_1=2] \\ P[X_1=3] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P[X=1] \\ P[X=2] \\ P[X=3] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 \\ q_0 r \\ q_0^2 \end{pmatrix} = AU$$

D'où

$$\boxed{\forall n \geq 1,\, Y_n = A^n U}$$

8. **8.a)** On a trivialement :

$$j^3 = \left(e^{i2\pi/3}\right)^3 = e^{i2\pi} = 1$$

Ensuite, par somme de termes d'une suite géométrique de raison différente de 1 :

$$1 + j + j^2 = 1 + e^{i2\pi/3} + \left(e^{i2\pi/3}\right)^2 = \frac{1-\left(e^{i2\pi/3}\right)^3}{1-e^{i2\pi/3}} = 0$$

La relation $1 + \bar{j} + \bar{j}^2 = 0$ n'est que la relation conjuguée de celle-ci. Elle est donc bien vérifiée. Ensuite :

$$\bar{j} = e^{-i2\pi/3} = e^{i2\pi}e^{-i2\pi/3} = \left(e^{i2\pi/3}\right)^2 = j^2$$

et pour finir :

$$|j|^2 = j\bar{j} = e^{i2\pi/3}e^{-i2\pi/3} = e^0 = 1$$

8.**c)** On a

$$
\begin{aligned}
\overline{P}\times P &= \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & \overline{j}^2 & \overline{j}\\ 1 & \overline{j} & \overline{j}^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & j^2 & j\\ 1 & j & j^2\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}3 & 1+j+j^2 & 1+j+j^2\\ 1+\overline{j}+\overline{j}^2 & 1+j\overline{j}+\overline{j}^2j^2 & 1+\overline{j}^2j+\overline{j}j^2\\ 1+\overline{j}+\overline{j}^2 & 1+\overline{j}j^2+\overline{j}^2j & 1+j\overline{j}+\overline{j}^2j^2\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 1+|j|^2+|j^2|^2 & 1+|j|^2\overline{j}+|j|^2j\\ 0 & 1+|j|^2j+|j|^2\overline{j} & 1+|j|^2+|j^2|^2\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 1+\overline{j}+j\\ 0 & 1+j+\overline{j} & 3\end{pmatrix}\\
&= 3Id
\end{aligned}
$$

D'où le fait que

$$\boxed{P^{-1}=\frac{1}{3}\overline{P}}$$

8.**d)** Une récurrence sur n fonctionne très bien en utilisant $PP^{-1}=Id$.

9. 9.**a)** D'après la question 7, on sait que

$$Y_n = A^nU \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$$

et d'après la question précédente, on sait que

$$A^n = P\Delta^nP^{-1}$$

D'où

$$Y_n = P\Delta^nP^{-1}U$$

Calculons ces coefficients à l'aide de $P^{-1}=\frac{1}{3}\overline{P}$:

$$
\begin{aligned}
Y_n &= P\Delta^n\frac{1}{3}\overline{P}\\
&= \frac{1}{3}P\Delta^n\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & \overline{j}^2 & \overline{j}\\ 1 & \overline{j} & \overline{j}^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{3}P\Delta^n\begin{pmatrix}1\\ \overline{j}\\ \overline{j}^2\end{pmatrix} = \frac{1}{3}P\Delta^n\begin{pmatrix}1\\ j^2\\ j\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{3}P\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \delta_2^n & 0\\ 0 & 0 & \delta_3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ j^2\\ j\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{3}P\begin{pmatrix}1\\ \delta_2^nj^2\\ \delta_3^nj\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & j^2 & j\\ 1 & j & j^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ \delta_2^nj^2\\ \delta_3^nj\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1+\delta_2j^2+\delta_3j\\ 1+\delta_2^nj+\delta_3^nj^2\\ 1+\delta_2^n+\delta_3^n\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

i.e.

$$\boxed{\begin{cases}P(X_n=1)=\frac{1}{3}\left(1+\delta_2j^2+\delta_3j\right)\\ P(X_n=2)=\frac{1}{3}\left(1+\delta_2^nj+\delta_3^nj^2\right)\\ P(X_n=3)=\frac{1}{3}\left(1+\delta_2^n+\delta_3^n\right)\end{cases}}$$

9.**b)** On a

$$
\begin{aligned}
\overline{\delta_2} &= q_0\left(r^2+\overline{j}+r\overline{j^2}\right)\\
&= q_0\left(r^2+j^2+rj^4\right)\\
&= q_0\left(r^2+j^2+rj\right)=\delta_3
\end{aligned}
$$

i.e.

$$\boxed{\overline{\delta_2}=\delta_3}$$

Ensuite,

$$
\begin{aligned}
\left(r^2+j+rj^2\right)\left(r^2+j^2+rj\right) &= r^4+r^2j^2+r^3j+r^2j+j^3+rj^2+r^3j^2+rj^4+r^2j^3\\
&= r^4+r^3\left(j+j^2\right)+r^2\left(j+j^2+1\right)+r\left(j^2+j\right)+1\\
&= r^4-r^3-r+1
\end{aligned}
$$

et

$$(1-r)\left(1-r^3\right)=1-r-r^3+r^4$$

d'où

$$\boxed{\delta_2\delta_3 = q_0^2\,(1-r)\left(1-r^3\right)}$$

Pour finir :

$$\delta_2\delta_3 = |\delta_2|^2 = q_0^2\,(1-r)\left(1-r^3\right) = \frac{(1-r)^3}{1-r^3}$$

$\dfrac{(1-r)^3}{1-r^3} < 1 \Longleftrightarrow 1-3r+3r^2-r^3 < 1-r^3$ (car r$^3 < 1$)

$\dfrac{(1-r)^3}{1-r^3} < 1 \Longleftrightarrow 3r(r-1) < 0$ ce qui est vrai car $r \in]0,1[$

d'où

$$\boxed{|\delta_2| = |\delta_3| < 1}$$

9.**c)** D'après les formules obtenues dans la question a), à l'aide de la question précédente qui nous donne alors

$$\lim_{n\to+\infty} \delta_2^n = \lim_{n\to+\infty} \delta_3^n = 0$$

on obtient

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} P(X_n=1) = \lim_{n\to+\infty} P(X_n=2) = \lim_{n\to+\infty} P(X_n=3) = \frac{1}{3}}$$

Si on tourne la roue un grand nombre de fois, le modèle tend à devenir équiprobable !